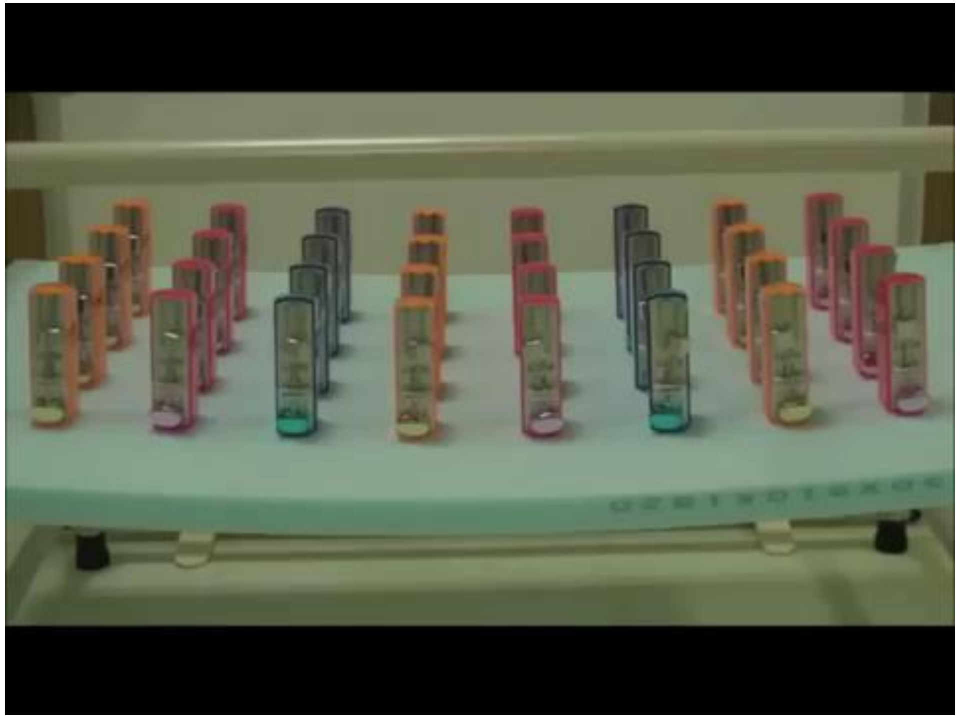
Cours 19 – 20/11/2024

8. L'oscillateur harmonique linéaire

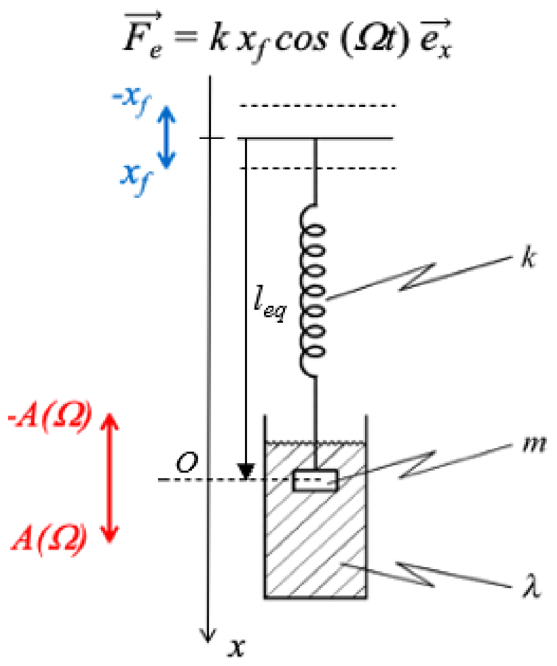
8.7. Oscillateur forcé

8.8. Oscillateurs couplés



8.7. Oscillateur forcé

■ Résolution de l'équation différentielle par les complexes



Equation du mouvement de l'oscillateur amorti forcé soumis à une force excitatrice $\vec{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\, \vec{e_x} = k x_f \cos(\Omega t)\, \vec{e_x}$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t) \quad avec\ f = \frac{k x_f}{m}$$

Equation différentielle en notation complexe :

$$\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = f e^{i\Omega t} = \underline{f} \quad avec\ \ \underline{x}\ et\ \underline{f}\ sont\ des\ nombres\ complexes$$

La solution stationnaire (régime permanent) est un mouvement sinusoïdal de pulsation Ω et d'amplitude réelle A (dépendant de Ω). Ce mouvement oscillatoire est déphasé de ψ (dépendant de Ω) par rapport à la force excitatrice. La forme générale de la solution s'écrit :

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\boxed{A(\Omega)}}_{amplitude}\ \underbrace{\boxed{e^{i\Psi(\Omega)}}}_{déphasage}\ \underbrace{\boxed{e^{i\Omega t}}}_{pulsation}$$

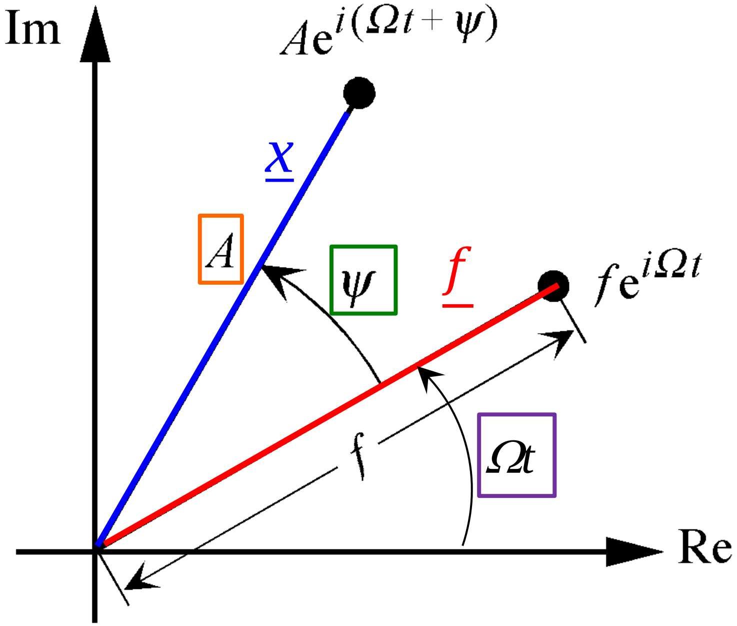
Hors programme examen

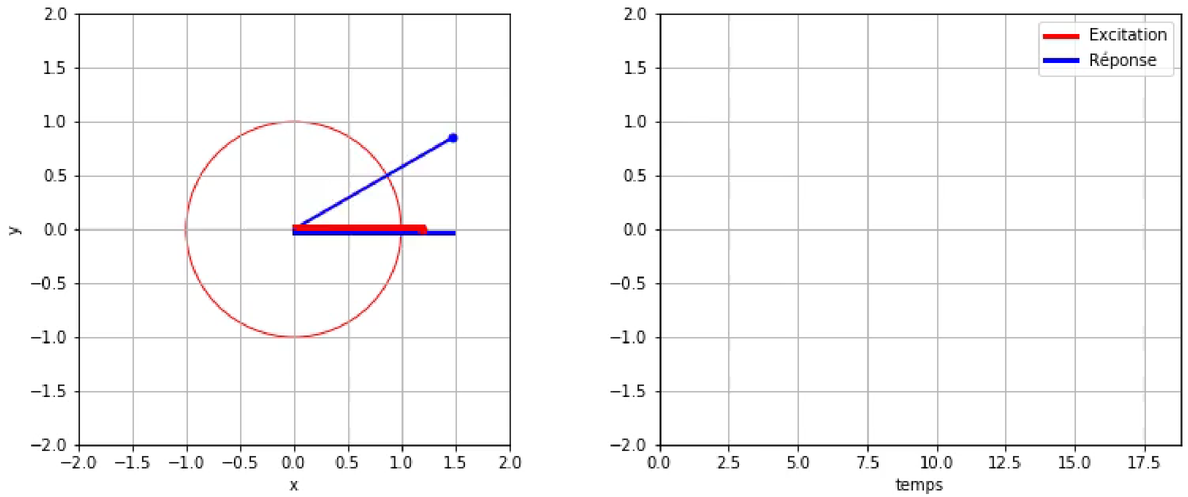
8.7. Oscillateur forcé

$$\boxed{\underline{x}(t)} = \overset{\text{amplitude}}{\boxed{A(\Omega)}}\;\overset{\text{déphasage}}{\boxed{e^{i\Psi(\Omega)}}}\;\overset{\text{pulsation}}{\boxed{e^{i\Omega t}}}$$

$A(\Omega)$ est l'amplitude réelle du mouvement oscillatoire forcé. Elle dépend de la pulsation de la force appliquée à l'oscillateur. Le mouvement de la masse m est déphasé de ψ par rapport au mouvement de la force excitatrice.

On peut représenter $\underline{x}$ et $\underline{f}$ dans le plan complexe :





Hors programme examen

8.7. Oscillateur forcé

Calcul de $A(\Omega)$ et $\Psi(\Omega)$

On injecte $\underline{x}(t) = \underbrace{A(\Omega)e^{i\psi(\Omega)}}_{\underline{x}_0}e^{i\Omega t}$ *dans* $\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2\underline{x} = f e^{i\Omega t}$

Nous obtenons $(-\Omega^2 + i2\lambda\Omega + \omega_0^2)\underline{x}_0 e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t}$ soit

$$\boxed{\underline{x}_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega}}$$

nombre complexe de la forme $\frac{1}{a+ib}$

*or**) $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ *d'où*

$$\boxed{\underline{x}_0 = \frac{(\omega_0^2-\Omega^2)f}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2} - i\,\frac{2\lambda\Omega f}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2}}$$

$\underline{x}_0$ est un nombre complexe, qui contient à la fois l'amplitude réelle $A(\Omega)$ et le déphasage $\psi(\Omega)$ du mouvement de la masse m par rapport à la force excitatrice

Les parties réelle et imaginaire de $\underline{x}_0$ *sont* $\Re(\underline{x}_0) = f\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2}$ $\Im(\underline{x}_0) = f\frac{-2\lambda\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2}$

*) $\frac{1}{a+ib}\times\frac{1}{a-ib} = \frac{1}{a^2-i^2b^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Hors programme examen

8.7. Oscillateur forcé

Amplitude et déphasage en régime permanent

Amplitude $A(\Omega)$

$$A(\Omega) = \left\|\underline{x_0}\right\| = \sqrt{\Re^{2}(\underline{x_0}) + \Im^{2}(\underline{x_0})} = \sqrt{\underline{x_0}\,\underline{x_0^*}}$$

$$\boxed{A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \qquad avec \quad f = \frac{kx_f}{m} \qquad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Maximum de la fonction $A(\Omega)$ $\Rightarrow \frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0$

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$

Pulsation de résonance

Déphasage $\psi(\Omega)$

$$\tan\psi(\Omega) = \frac{\Im(\underline{x_0})}{\Re(\underline{x_0})} = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\boxed{\psi(\Omega) = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

8.7. Oscillateur forcé

Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

- *Comparaison des différentes pulsations* $\omega_0, \omega, \Omega_r$:

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2 = \omega^2 - \lambda^2 \ \text{avec} \ \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \ \text{d'où} \ \boxed{\Omega_r < \omega < \omega_0}$$

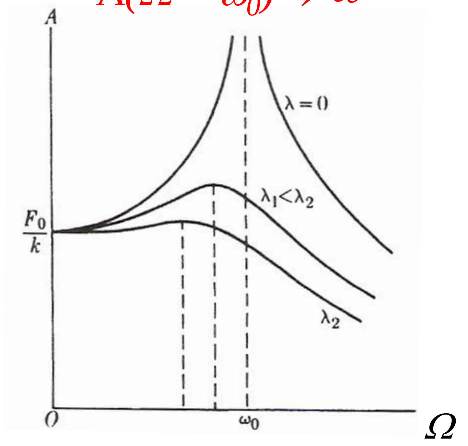
- *Cas de l'oscillateur forcé avec frottement nul ($\lambda=0$)* :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \Rightarrow \Omega_r = \omega_0$$

$$\longrightarrow A(\Omega) = \frac{f}{\underline{(\omega_0^2 - \Omega^2)}}$$

L'expression de $A(\Omega)$ diverge pour $\Omega = \omega_0$. L'amplitude devient infinie. Dans la réalité, on atteint les limites physiques du système, ce qui conduit à des phénomènes de ruptures mécaniques.

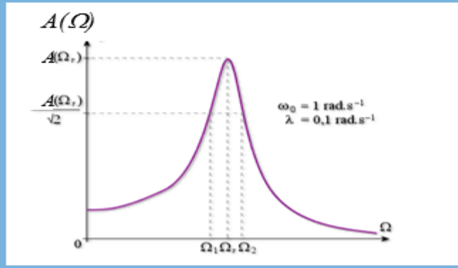
Pour $\lambda=0$, $A(\Omega = \omega_0) \to \infty$



Information

Facteur de qualité : $Q = \dfrac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \dfrac{\Omega_r^{\,2}}{2\lambda\omega}$

$\Delta\Omega$ est la bande passante définie telle que $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ avec $A(\Omega_1)=A(\Omega_2)=A(\Omega_r)/\sqrt{2}$

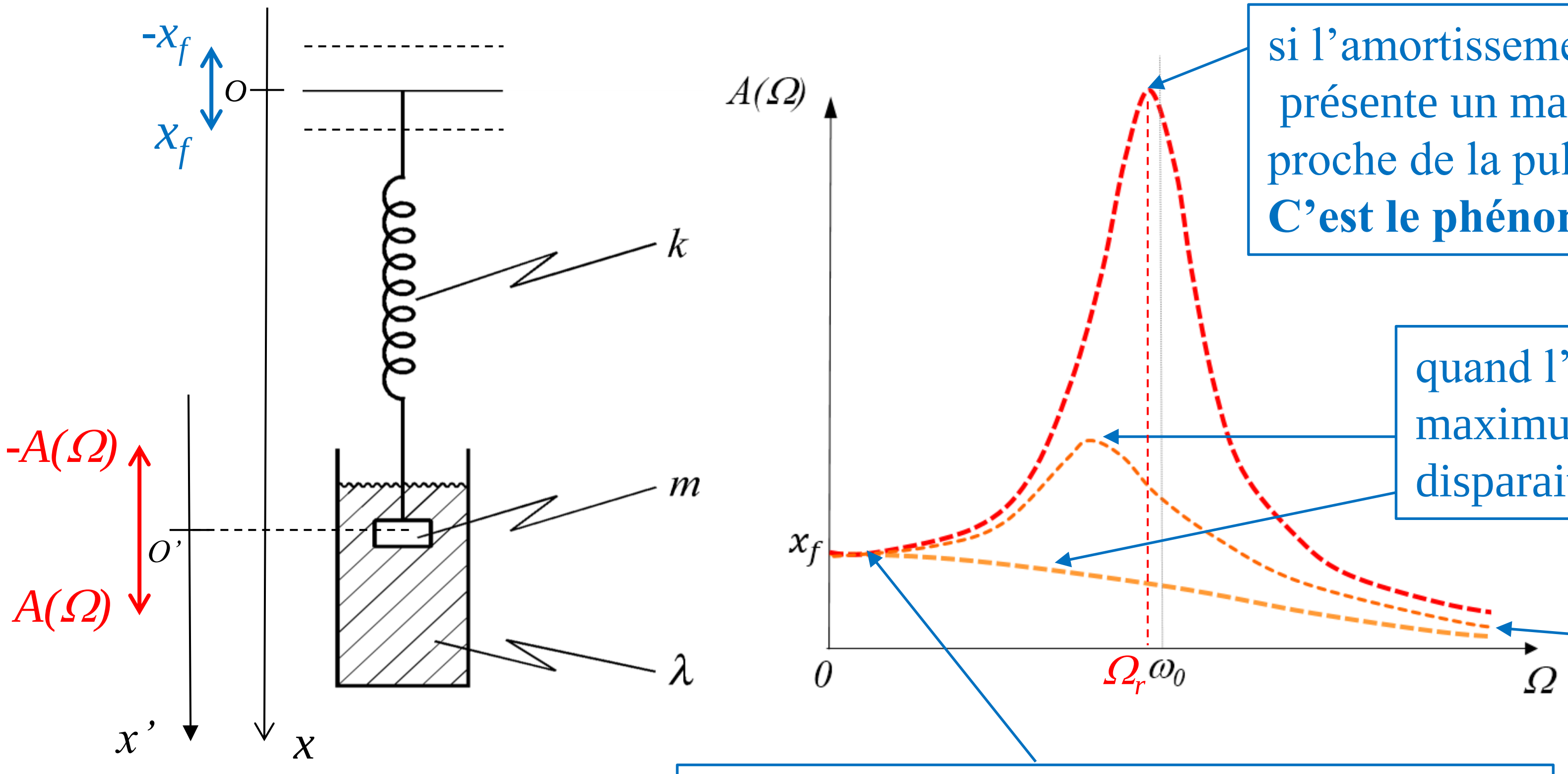


8.7. Oscillateur forcé

■ Oscillateur amorti forcé avec frottement fluide

Evolution de l'amplitude $A(\Omega)$ de l'oscillateur forcé en fonction de la pulsation Ω :

$$\vec{F_e} = k\, x_f \cos(\Omega t)\, \vec{e_x}$$



si l'amortissement est faible (λ petit), l'amplitude $A(\Omega)$ présente un maximum très marqué pour une pulsation Ω_r proche de la pulsation de l'oscillateur libre ω_0.
C'est le phénomène de résonance

quand l'amortissement augmente (λ), le maximum de $A(\Omega)$ diminue et finalement disparait pour les forts amortissements

si Ω est très grande, alors l'amplitude $A(\Omega)$ tend vers 0

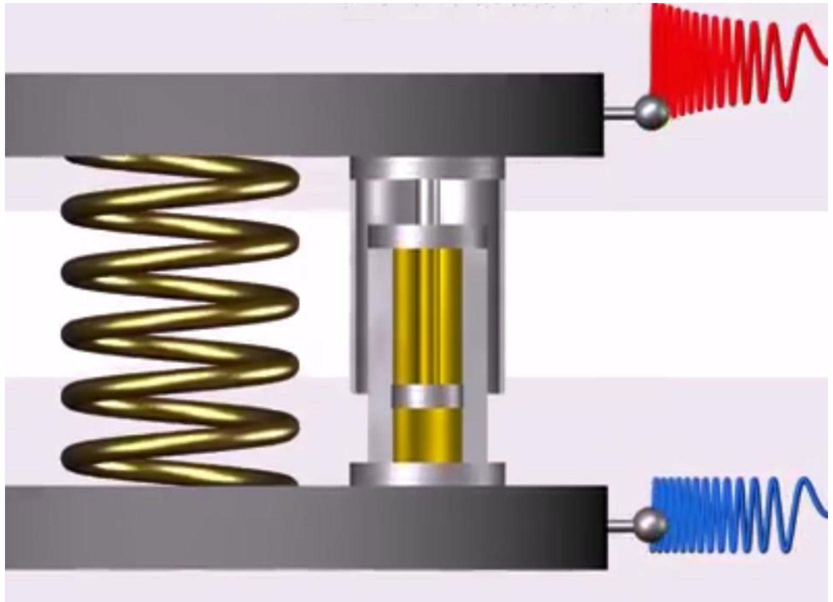
si Ω est très petite, alors l'amplitude $A(\Omega)$ est celle de la force excitatrice $A(\Omega) \approx x_f$

8.7. Oscillateur forcé

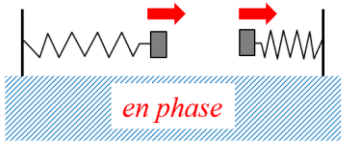
■ Déphasage $\Psi(\Omega)$

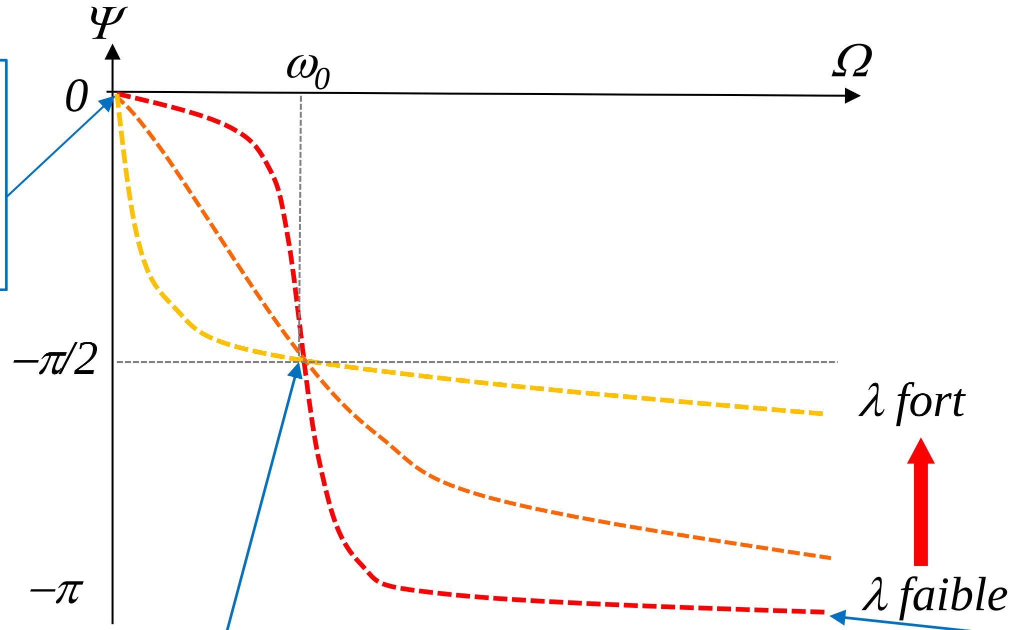
déphasage du mouvement de la masse m *par rapport à l'excitation*

$$\boxed{\psi(\Omega) = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$



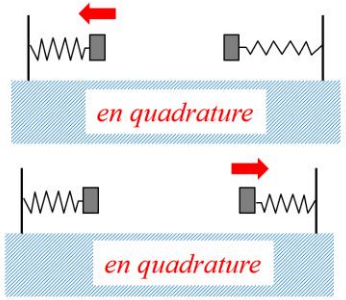
si Ω est très petite, alors l'oscillateur est en phase avec la force excitatrice

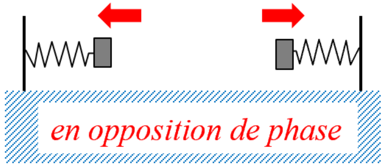




si Ω est très grande, alors l'oscillateur est en opposition de phase avec la force excitatrice

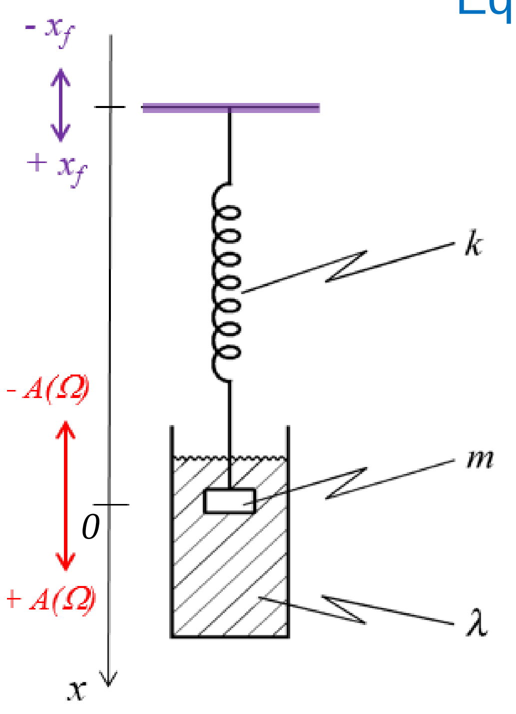
pour $\Omega = \omega_0$, l'oscillateur est en quadrature de phase avec la force excitatrice





8.7. Oscillateur forcé

Résumé

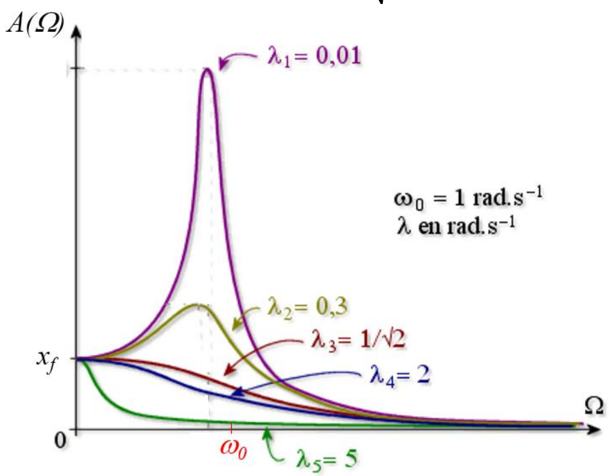


Equation du mouvement : $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)}$$

avec $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ f = \dfrac{F_e}{m} = \dfrac{kx_f}{m} \end{cases}$ *Pulsation propre du ressort libre*

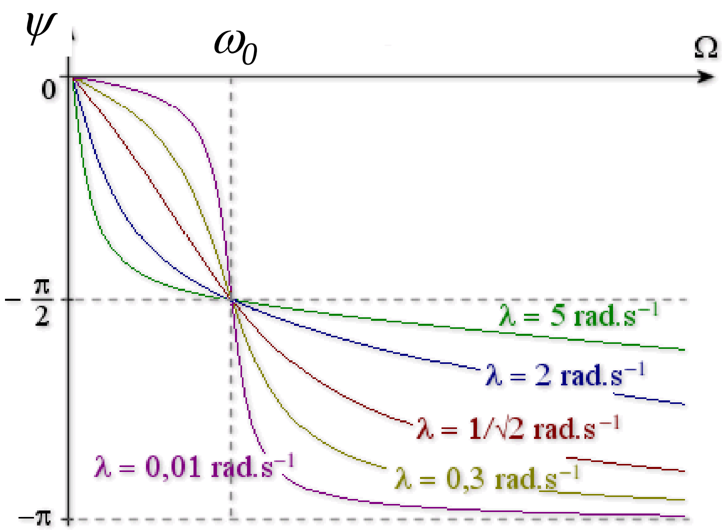
Solution : $$\boxed{x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

Amplitude $A(\Omega) = x_f \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$



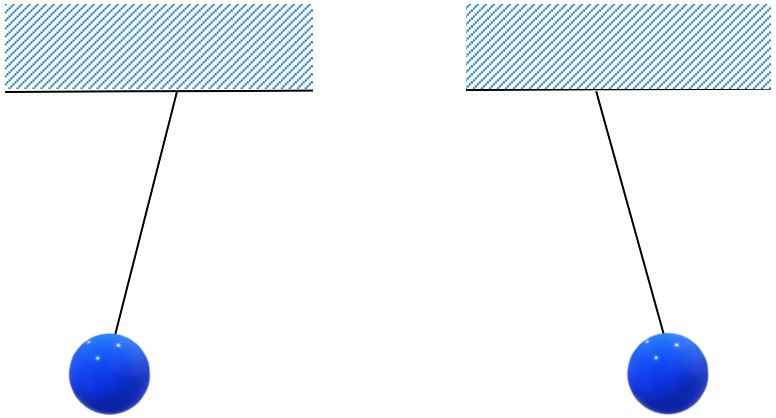
Pulsation de résonance : $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

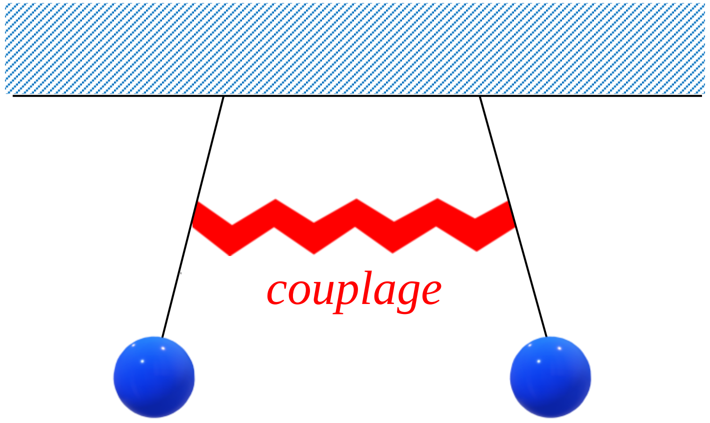
Déphasage $\psi(\Omega) = \arctan\dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

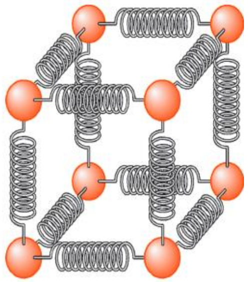


8.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Introduction







Oscillateurs libres indépendants

- oscillateurs **non couplés**

Oscillateurs libres en interaction

- oscillateurs **couplés**

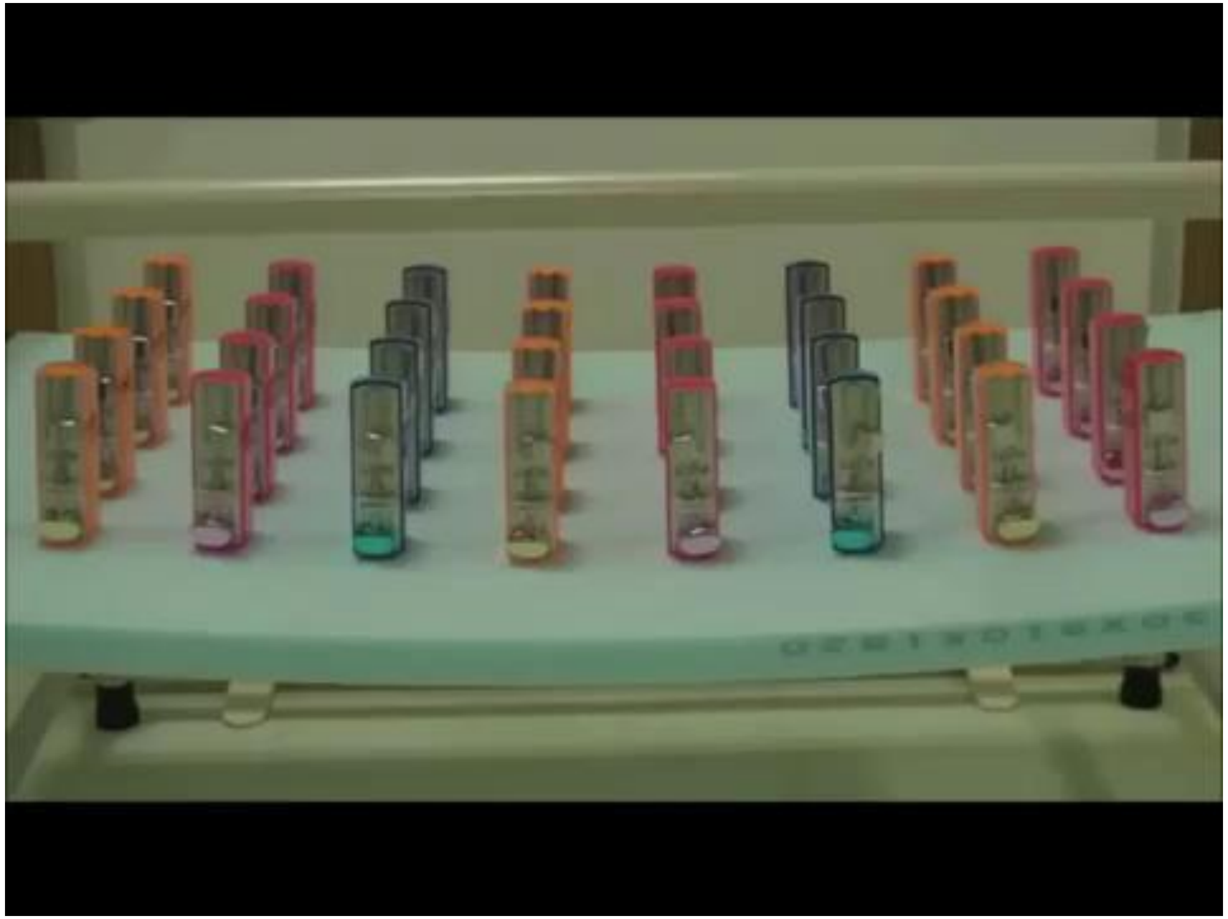
Cristal : l'interaction entre les atomes (liaison chimique) peut être assimilée à un ressort

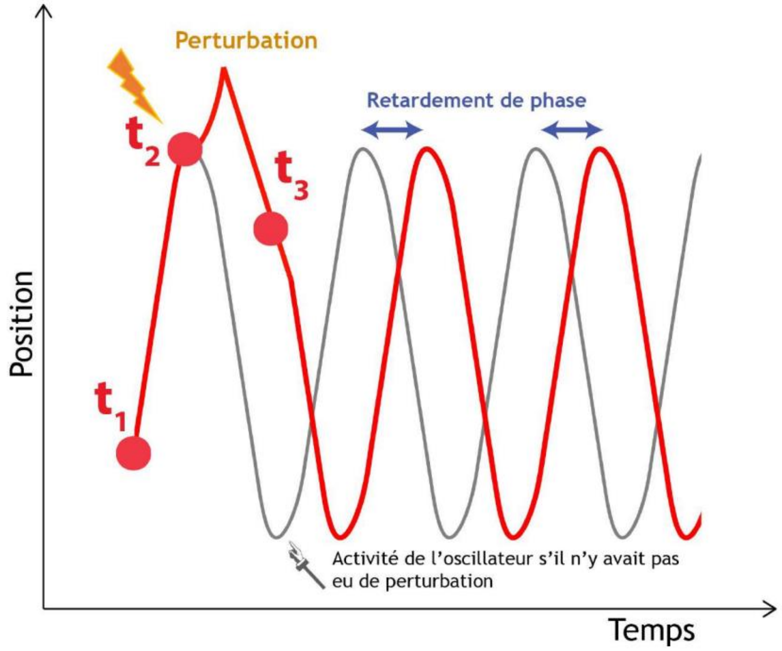
⇨ *très grand nombres d'oscillateurs couplés*

Huygens découvre en 1665 que deux horloges placées côte à côte se synchronisent. Les balanciers bougent en phase (même mouvement de balancier).

8.8. Oscillateurs harmoniques couplés

- Synchronisation d'oscillateurs couplés





Un concert nocturne de lucioles (© Robin Meier)

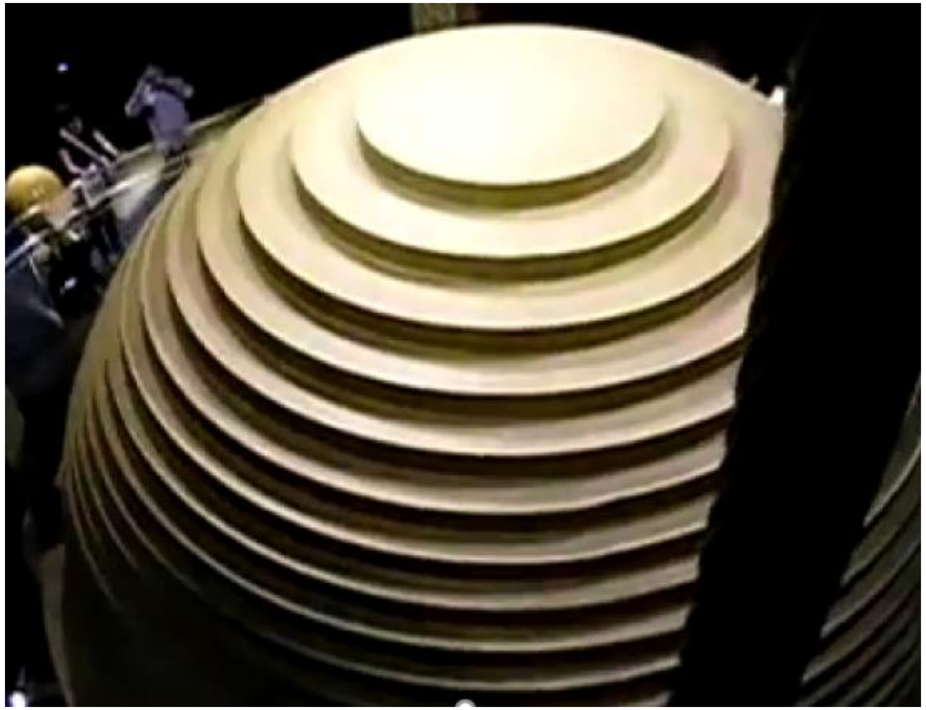
8.8. Oscillateurs harmoniques couplés

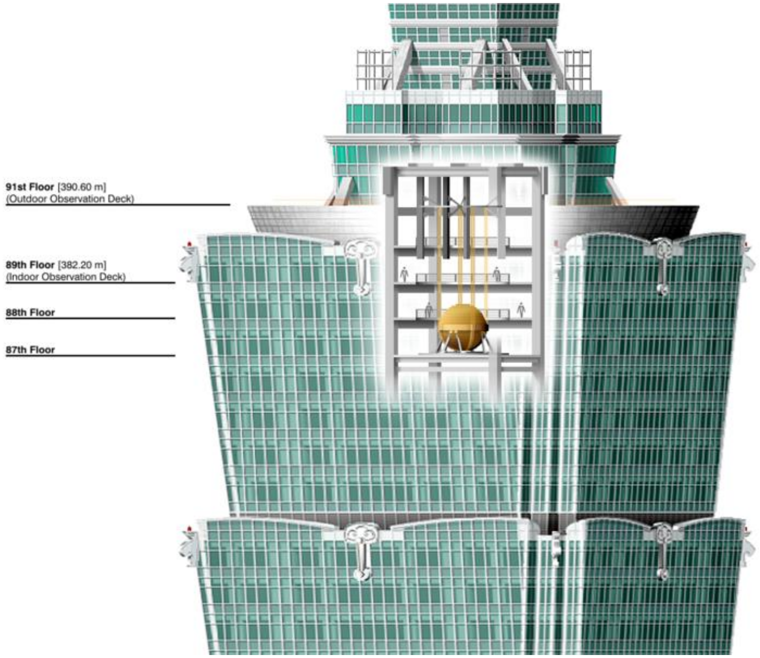
Application des oscillateurs couplés : amortissement d’un oscillateur

8.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Application des oscillateurs couplés : amortissement d’un oscillateur

La tour Taipei 101 (Taiwan)

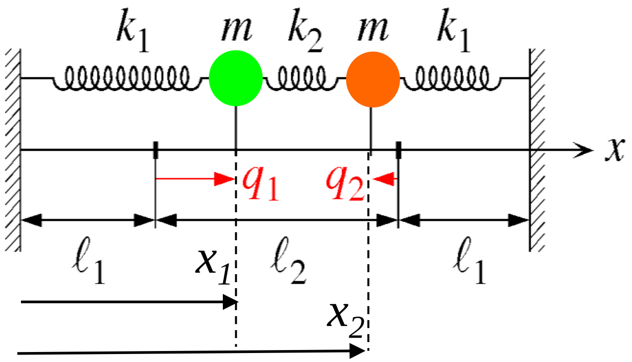




La tour est un oscillateur qui a une fréquence propre. Sous l’effet d’une onde se propageant dans le sol et provoquée par un tremblement de Terre, l’amplitude des mouvements de la tour peut être amplifiée (oscillateur forcé). Un deuxième oscillateur est alors placé au sommet de la tour (un pendule d’environ 700 tonnes). Celui-ci est couplé à la tour de telle sorte que les mouvements de cette dernière sont transférés au pendule. Les oscillations du pendule sont ensuite amorties par des vérins hydrauliques (dissipation de l’énergie).

8.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques



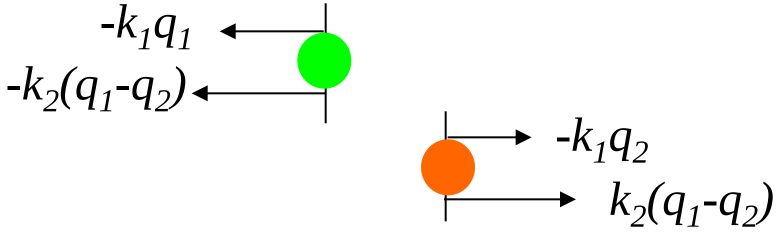
$$q_1 = x_1 - l_1$$

$$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$$

l_1, $l_2 + l_1$ *sont les positions d'équilibre*

q_1 *et* q_2 *sont les écarts par rapport aux positions d'équilibre*

Bilan des forces



2nd loi de Newton

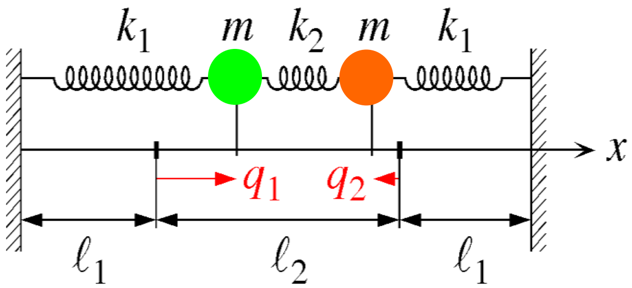
$$m\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -k_1q_1 - k_2(q_1 - q_2)$$

$$m\,\frac{d^2x_2}{dt^2} = m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -k_1q_2 + k_2(q_1 - q_2)$$

2 équations de mouvement qui couplent les 2 masses

8.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques



Equations du mouvement des deux masses

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)\, q_1 - k_2 q_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_1 + k_2)\, q_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ces équations sont couplées (q_1 et q_2 dans chaque équation)

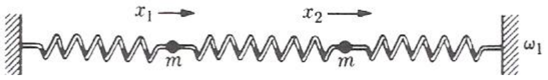
Forme générale des solutions des <u>modes propres</u> (mouvement particulier des 2 masses) :

$$q_1 = C_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right), \quad q_2 = C_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right)$$

<u>Rem</u> : ω et φ ne sont pas connues. Nous savons seulement que les solutions doivent s'écrire sous la forme cte $\cos(\omega t+\varphi)$. Il faudra donc les déterminer.

<u>Modes propres :</u>

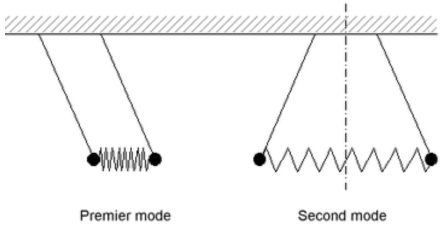
Ressorts couplés



mouvement en phase

mouvement en opposition de phase

Pendules couplés



Hors programme examen